Title	パンチドカードメソッドによる非線型方程式の数値解法
Author(s)	清水, 辰次郎; 片山, 有一
Citation	全国紙上数学談話会. 2(11) p.355-p.359
Issue Date	1948-11-01
oaire:version	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75253
rights	
Note	

119. パンチドカードメソッドによる非線型方程式の數値解法

清水辰次郎　片山有一 (1948.9.9)

我國に於ては實用性ある計算器械は極めて少い。[1] 從つて複雑な數値計算を實行しようとすれば、I.B.M.統計機械に[2] よるより他に方法がない。筆者は約八年前より同機による數値計算を考へてきたが同機を特に必要とする非線型方程式の數値解法に利用した。科學技術の進歩は線型の關係にては不充分となり非線型の幾多の問題を解く必要に迫られてゐる。これらの問題の或者は在來の數値計算法にて解き得られるが或種の問題例へば境界値を與へられた非線型微分方程式の解法や非線型積分方程式の解法の如き、高次代數連立方程式の解法に歸着させると都合のよい場合が少くない。

一方代數方程式は一元のものは數値計算をやり易い、これは根の第一近似値の求め易いことによる。二元までは高次連立方程式もグラフを畫くことにより第一近似根を求めることは或程度の困難さに止るといふこともできるが三元以上の高次連立方程式に至っては根の第一近似を求めることは普通の數値計算にては絶望に近いとされてゐる。理論的には消去法により高次一元方程式になるがその方法は實用的ではない。

著者は統計機械の高い性能により高次連立方程式の第一近似根を探す方法を實施しそれにより非線型微分方程式の境界値問題を解く方法を示す。高次連立方程式は第一近似が求められれば、その精度を上げることは Newton 法, 或は Iteration 法等比較的容易に根の近似度を上げることができることはよく知られてゐる。[3]

---

1) 微分方程式解法機（として著者の研究室及び應用數學研究所にあるもの）及び統計記録機（山下研究室試作のもの）尚二三の實驗中のものがあるがこれは現在ある程度の實用性あるものとも言へない。

2) アメリカ インターナショナル ビジネス マシーン コオペレーションの統計機械の一組については筆者の パンチド カード メソッドによる數値計算法、東北書房參照。

3) 尤もこれらの方法が適用せられるには第一近似は相當によい近似であることを要する。元の數が増加するに從つて益々近似度のよいことが必要となる。

(I) 代数高次連立方程式の解法.

与へられた連立方程式に数学的考察をして根の大体の限界を求めその間隔を10乃至100等分（根の位置が推定せられる場合は等間隔でなくその附近を細かにする）してそれらのあらゆる組合せの数値を方程式に代入して計算する。そのうちに全部の方程式を或程度満足する根の幾組かを得る筈である。これによりその近くの区間を更に細分して同法を繰返へす。ここにより第一近似根の組を得ることができる。

例として

$$f_1 \equiv a_1x^3 + a_2xy + a_3z^2 + a_4x + a_5z + a_6 = 0$$

$$f_2 \equiv y^3 + b_2x^2y + b_3zx + b_4y + b_5z + b_6 = 0$$

$$f_3 \equiv x^2 + c_2xz^2 + c_3zy^2 + c_4xy + c_5x + c_6 = 0$$

について考えよう。

先ず10枚のカードの第一行に夫々1.2.3.4.5.6.7.8.9.0を穿孔して同様な10枚のカード100組をつくる。

次に最初の10枚の第二行に1，次の10枚の第二行に2，‐‐‐最後の10枚の第二行に0を穿孔する。

次に最初の100枚のカードの第三行に1，次の100枚に2‐‐‐‐最後の100枚の第三行に0を穿孔する。

斯様にして1000枚のカードが第一，第二，第三行に穿孔される。これをソーターにて分類する組とする。

今 暗探法に代入してみる x, y z の数字を三桁のものとし それを夫々 x_1, x_2, ‐‐‐‐x_{10}, y_1, y_2, ‐‐‐‐ y_{10}, z_1, z_2, ‐‐‐‐z_{10} とすれば 先ず第1，第101，第201，‐‐‐‐ 第901番目のカード（計10枚）に第四行から第六行まで夫々 x_1, x_2, ‐‐‐‐ x_{10} を穿孔し，それを親カードとして夫々100枚のカードで第四行から第六行に夫々 x_1, x_2, ‐‐‐‐x_{10} を穿孔したものをつくる。

次にそれらのカードに第七行から第九行 第十行から第十二行に夫々 x_i を穿孔する 即ち x_i が三つ並んで穿孔される。

次に x_i の穿孔された1000枚のカードを第二行により10個の箱ポケットに

分類し、分類されたものに対して x_i と同様に y_i を第十三行から第十五行、第十六行から第十八行、第十九行から第二十一行までに三つ並べて穿孔する。

次に第一行によりそれらのカードを十個に分類して全く同様に z_i を第二十二行から第二十四行、第二十五行から第二十七行、第二十八行から第三十行までに三つ並べて穿孔する。

次に乗算穿孔機にて夫々 x_i^2, x_iy_i, z^2_k, …… $x_i^2y_j$ …… 等方程式に現われる項を計算して穿孔させる。次に第一、第二、第三には前と同じ穿孔をもつ1000枚のカードを六組とつて第一組には x_i^3, y_j^3, z_i^3, 第二組には x_iy_i, $x_i^2y_i$, $x_iz_k^2$ 第三組には z_k^2, x_iz_k, $z_ky_i^2$, 第四組には x_i, y_i, 第五組には z_k, z_k, x_i, 第六組には a_i, b, c_6 を穿孔する。ここに6という数は方程式の項の数である。

次に a_1, a_2, a_3, …… b_2, b_3, …… c_2, c_3 ……を親カードとして群集機にて1000枚のカード六組が所用の項が穿孔せられたものを得る

コレーターにて6枚のカードの1000組となるよう順序を変えて f_1, f_2, f_3 を加算する。α－会計機にて f_1, f_2, f_3 の値の表をつくる。

以上の x, y, z の数値のうち根の組に充分近いものがあれば f_1, f_2, f_3 は充分0に近いものが現われる筈である。

以上の方法は方程式の項をつくるのに手数が多いが、組合せの数が多くなると組織的にやらなければならない。尤も組合せの数の多くないときや項数の多くないときは初めから $a_ix_iy_i$ …… 等を計算機で計算してカードの所用数に穿孔して f_1, f_2, f_3 を計算すればいい。

実例として

$$f_1 \equiv 21.6x^3 + 1.8xy - z^2 + 5.3x + 2.1z - 160.1 = 0$$

$$f_2 \equiv y^3 + 13.1x^2y - 1.3xz + 5.3y + 2.4z - 596.4 = 0$$

$$f_3 \equiv x^3 + 2.1z^2x - 11.7yz - 21.6xy - x - 450.1 = 0$$

に $|x|$, $|y|$, $|z| < 10$ なる根の組を求めるには先ず計算により $1 < x < 3$, $4 < y < 8$, $-7 < z < 0$ なることがわかるから $x = 1, 2, 3$, $y = 4, 5, 6, 7, 8$, $z = 0, -1, -2, -3, -4, -5, -6, -7$ を代入した一部を示せば、

x	y	z	f_1	f_2	f_3
1	6	−1	−125.5	−271.1	−156.4
1	6	−2	−130.6	−272.2	+271.1
1	7	−1	−123.7	−125.7	− 25.9
1	7	−2	−128.8	−126.8	+553.7
2	6	−1	− 41.8	− 34.0	−277.9
2	6	−2	+ 36.7	− 33.8	+155.9
2	7	−1	+ 40.5	+150.7	−169.0
2	7	−2	+ 40.3	+150.9	+416.9
y	z	x			
6	−1	1	−125.5	−271.1	−156.4
6	−1	2	+41.8	− 34.0	−277.9
6	−2	1	−130.6	−272.2	−271.1
6	−2	2	+ 36.7	− 33.8	+155.9
7	−1	1	−123.7	−125.7	− 25.9
7	−1	2	+ 45.4	+150.7	−169.0
7	−2	1	−128.8	−126.8	+553.7
7	−2	2	+ 40.3	+150.9	+416.9
x	z	y			
1	−1	6	−125.5	−271.1	−156.4
1	−1	7	−123.7	−125.7	− 25.9
1	−2	6	−130.6	−272.2	+271.1
1	−2	7	−128.8	−126.8	+553.7
2	−1	6	+ 41.8	− 34.0	−277.9
2	−1	7	+ 45.4	+150.7	−169.0
2	−2	6	+ 36.7	− 33.8	+155.9
2	−2	7	+ 40.3	+150.9	+416.9
1.8	6.4	−1.4	− 8.8	− 28.8	− 16.6
		−1.6	− 9.8	− 28.4	+ 73.7
	6.6	−1.4	− 8.1	+ 5.5	+ 18.2
		−1.6	− 9.2	+ 6.1	+122.4
2.0	6.4	−1.4	+ 41.4	+ 35.3	− 41.3
		−1.6	+ 40.4	+ 35.3	+ 57.1
	6.6	−1.4	+ 42.1	+ 72.2	− 7.5
		−1.6	+ 41.1	+ 72.2	+ 96.9

根の組の近似度が充分でないときは f_1, f_2, f_3 は0に近くはないが、x, y, z のうち二つをとめて第三のものを動かすとき f_1, f_2, f_3 のすべてがどこかで符号を変えること前表の如くであるから根の所在がわかる。

尤もこのことは三つの曲面 f_1, f_2, f_3 が三次元空間に接するものがあつたり又は三つとも極度に接近していたりすると左様にはならぬときがあり得るが、前者は $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ が零となるものがあることから判断することができ、後者は更に区間を細分すればわかる筈である。

(II)、応用として次の微分方程式

$$\frac{d^2y}{dt^2}=y^3+4\pi^2\sin\pi\left(t-\frac{1}{2}\right)$$

の $t=-\frac{1}{2}, y=0$; $t=\frac{1}{2}, y=0$ なる境界値をもつ解を計算してみた。

境界条件が与えられているから積分方程式の形に直して非線型の方程式となり、数値積分法により二次五元の方程式に帰着させて第一近似値を求めてみると、

$t_1=-0.459$　　$y_1=1.636$

$t_2=-0.269$　　$y_2=1.804$

$t_3=0.$　　$y_3=2.624$

$t_4=0.269$　　$y_4=1.804$

$t_5=0.453$　　$y_1=1.636$